Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 10 im Wintersementer 2020/21 (am 15.01.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

12. Die Jordan-Zerlegung II

12.4 Lemma: Operationen mit halbeinfachen, nilpotenten und unipotenten Endomorphismen

Seien V und W endlich-dimensionale k-Vektorräume. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Seien a, b: $V \longrightarrow V$ zwei kommutierende k-lineare Endomorphismen,

$$a \circ b = b \circ a.$$

Sind a und b halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent), so gilt dasselbe auch für

$$a \circ b: V \longrightarrow V.$$

(ii) Seien a: $V \longrightarrow V$ und b: $W \longrightarrow W$ zwei k-lineare Endomorphismen.
Sind a und b halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent), so gilt dasselbe auch für

$$a \oplus b: V \oplus W \longrightarrow V \oplus W \text{ und } a \otimes b: V \otimes W \longrightarrow V \otimes W.$$

(iii) Seien a: $V \longrightarrow V$ und b: $W \longrightarrow W$ zwei k-lineare Endomorphismen.
Sind a unb b halbeinfach (bzw. nilpotent), so gilt dasselbe auch für

$$a \otimes 1 + 1 \otimes b: V \otimes W \longrightarrow V \otimes W.$$

Beweis. Zu (i) Wir wählen eine Basis von V und identifizieren a und b mit den Matrizen zu dieser Basis.

1. Fall: a und b sind halbeinfach.

Nach 2.4.2 (ii) gibt es eine Matrix x für welche xax^{-1} und xbx^{-1} Diagonalgestalt haben. Das Produk von Diagonal-Matrizen ist eine Diagonal-Matrix. Insbesondere ist

$$xax^{-1} \bullet xbx^{-1} = xabx^{-1}$$

eine Diagonal-Matrix, d.h. ab ist halbeinfach.

2. Fall: a und b sind nilpotent.

Nach Voraussetzung gilt

$$a^m = 0 = b^n.$$

Weil a und b kommutieren, folgt

$$(ab)^m = a^m \bullet b^m = 0 \bullet b^m = 0.$$

3. Fall: a und b unipotent.

Nach Voraussetzung gibt es natürliche Zahlen m und n mit

$$(a-1)^m = 0 \text{ und } (b-1)^n = 0.$$

Es gilt

$$a(b-1) + (a-1) = ab - a + a - 1 = ab - 1.$$

Weil a und b kommutieren, folgt

$$
\begin{aligned}
(ab - 1)^{m+n} &= (a(b-1) + (a-1))^{m+n} \\
&= \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} \cdot a^i \cdot (b-1)^i \cdot (a-1)^{m+n-i}
\end{aligned}
$$

Es reicht zu zeigen, jeder Summand unter dem Summenzeichen ist 0. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jedes i einer der Faktoren gleich 0 ist.

Für $i \ge n$ ist $(b-1)^i = 0$. Für $i < n$, d.h. $m+n-i > m+n-n = m$ ist $(a-1)^{m+n-i} = 0$.

Zu (ii). 1. Fall: a und b sind halbeinfach.
Nach Voraussetzung können wir Basen

$$v_1, \dots , v_m \in V \text{ und } w_1, \dots , w_n \in W$$

von V bzw. W so wählen, daß gilt

$$a(v_i) = c_i \cdot v_i \text{ mit } c_i \in k \text{ und } b(w_j) = d_j \cdot w_j \text{ mit } d_j \in k.$$

Die Vektoren

$$(v_1,0), \dots , (v_m,0),\ (0,w_1), \dots , (0,w_n) \in V\oplus W$$

bilden eine Basis von $V\oplus W$ mit

$$(a\oplus b)(v_i , 0) = (a(v_i), b(0)) = (c_i \cdot v_i, 0) = c_i \cdot (v_i,0)$$

$$(a\oplus b)(0, w_j) = (a(0),b(w_j)) = (0,d_j \cdot w_j) = d_i \cdot (0, w_j)$$

Die $(v_i, 0)$ und $(0, w_j)$ bilden eine Eigenbasis, d.h. $a\oplus b$ ist halbeinfach.

Weiter bilden die $v_i \otimes w_j$ eine Basis von $V\otimes W$, und es gilt

$$(a\otimes b)(v_i \otimes w_j) = a(v_i)\otimes b(w_j) = (c_i v_i)\otimes(d_j \cdot w_j) = c_i d_j (v_i \otimes w_j)$$

d.h. die $v_i \otimes w_j$ bilden eine Eigenbasis, d.h. $a\otimes b$ ist halbeinfach.

2. Fall: a und b nilpotent.
Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n$$

Nach Voraussetzung können wir n so groß wählen, daß a^n und b^n gleich 0 werden, dann ist aber $(a\oplus b)^n = 0$.
Weiter gilt

$$(a\otimes b)^n = a^n \otimes b^n,$$

d.h. es ist auch $(a\otimes b)^n = 0$ für große n.

3. Fall: a und b unipotent.
Für $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$(a\oplus 1 - 1\oplus 1)\ (x,y) = (a(x), y) - (x,y) = (a(x)-x, 0) = (a-1)\oplus 0\ (x,y),$$

also

$$
\begin{aligned}
&(a\oplus 1- 1\oplus 1) = (a-1)\oplus 0 \\
&(a\oplus 1- 1\oplus 1)^2 = (a-1)^2 \oplus 0 \\
&\dots \\
&(a\oplus 1- 1\oplus 1)^n = (a-1)^n \oplus 0
\end{aligned}
$$

Mit a ist also auch $a\oplus 1$ unipotent. Analog sieht man, daß auch $1\oplus b$ unipotent ist.
Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
(a\oplus 1)(1\oplus b\ (x,y)) &= (a\oplus 1)(x, b(y)) \\
&= (a(x), b(y)) \\
&= (1\oplus b)(a(x), y) \\
&= (1\oplus b)((a\oplus 1)(x,y)).
\end{aligned}
$$

Die unipotenten Abbildungen $a\oplus 1$ und $1\oplus b$ kommutieren. Nach (i) ist auch die Zusammensetzung

$$a\oplus b = (a\oplus 1)\circ(1\oplus b)$$

unipotent.

Betrachten wir das Tensorprodukt von a und b. Für $x \in V$ und $y\in W$ gilt

$$(a\otimes 1 - 1\otimes 1)(x\otimes y) = a(x)\otimes y - x\otimes y = (a-1)\otimes 1\ (x\otimes y),$$

also

$$(a\otimes 1- 1\otimes 1) = (a-1)\otimes 1$$

also für jede natürliche Zahl n auch

$$(a\otimes 1- 1\otimes 1)^n = (a-1)^n\otimes 1$$

Die rechte Seite wird 0 für große n, d.h.

$a\otimes 1$ ist unipotent.

Analog ergibt sich, daß auch

$1\otimes b$ unipotent

ist. Die beiden Abbildung kommutieren. Nach (i) ist auch die Zusammensetzung

$$(a\otimes 1)\circ(1\otimes b) = a\otimes b$$

unipotent.

Zu (iii). 1. Fall: a und b halbeinfach.

Nach Voraussetzung können wir Basen

$$v_1, \dots , v_m \in V \text{ und } w_1, \dots , w_n \in W$$

von V bzw. W so wählen, daß gilt

$$a(v_i) = c_i\bullet v_i \text{ mit } c_i \in k \text{ und } b(w_j) = d_j\bullet w_j \text{ mit } d_j \in k.$$

Die Tensorprodukte $v_i\otimes w_j$ bilden eine Basis von $V\otimes W$, und es gilt

$$\begin{aligned}(a\otimes 1 + 1\otimes b)(v_i\otimes w_j) &= a(v_i)\otimes w_j + v_i\otimes b(w_j)\\ &= (c_i+d_j)\bullet\ v_i\otimes w_j,\end{aligned}$$

d.h. die $v_i\otimes w_j$ bilden eine Eigenbasis für $a\otimes 1 + 1\otimes b$, d.h.

$$a\otimes 1 + 1\otimes b$$

ist halbeinfach.

2. Fall: a und b nilpotent.

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a\otimes 1)^n = a^n\otimes 1 \text{ und } (1\otimes b)^n = 1\otimes b^n.$$

Mit a und b sind auch $a\otimes 1$ und $1\otimes b$ nilpotent. Wir können n groß wählen, daß

$$(a\otimes 1)^n = 0 \text{ und } (1\otimes b)^n = 0$$

gilt. Weil $a\otimes 1$ und $1\otimes b$ kommutieren, folgt

$$\begin{aligned}(a\otimes 1 + 1\otimes b)^{2n} &= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (a\otimes 1)^{i}\circ(1\otimes b)^{2n-i}\\ &= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (a^i\otimes 1)\circ(1\otimes b^{2n-i})\end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, jeder Summand unter dem Summenzeichen rechts ist Null.

Für $i \ge n$ ist $a^i\otimes 1 = 0\otimes 1$ gleich Null. Für $i < n$ ist $2n-i > 2n-n = n$, also

$$1\otimes b^{2n-i} = 1\otimes 0 = 0$$

QED.

12.5 Die additive Jordan-Zerlegung

Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $a \in End(V)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt eindeutig bestimmte Endomorphismen $a_s, a_n \in End(V)$ mit folgenden Eigenschaften.

1. a_s ist halbeinfach und a_n ist nilpotent.
2. $a = a_s + a_n$ (additive Jordan-Zerlegung von a).
3. $a_s \circ a_n = a_n \circ a_s$.

(ii) Es gibt (von a abhängige) Polynome P, $Q \in k[x]$ in einer Unbestimmten x ohne Absolutglied mit

$$a_s = P(a) \text{ und } a_n = Q(a)$$

für jedes $x \in End(V)$.

(iii) Sei $W \subseteq V$ eine a-stabiler k-linearer Unterraum von V. Dann ist W auch stabil unter a_s und a_n und

$$a|_W = a_s|_W + a_n|_W$$

ist die additve Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W.

Seien $\overline{a}$, $\overline{a}_s$ und $\overline{a}_n$ die durch a, a_s bzw. a_n induzierten k-linearen Abbildungen auf dem Faktorraum $\overline{V} = V/W$. Dann ist

$$\overline{a} = \overline{a}_s + \overline{a}_n$$

die additive Jordan-Zerlegung von $\overline{a}$.

(iv) Seien ϕ: $V \longrightarrow W$ eine k-lineare Abbildung von endlich-dimensionalen k-Vektorräumen und $b \in End(W)$ mit

$$\phi \circ a = b \circ \phi.$$

Dann gilt auch

$$\phi \circ a_s = b_s \circ \phi \text{ und } \phi \circ a_n = b_n \circ \phi,$$

d.h.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ a_s\downarrow & & \downarrow b_s \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ a_n\downarrow & & \downarrow b_n \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \end{array} \quad \text{sind kommutativ, falls} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ a\downarrow & & \downarrow b \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \end{array} \quad \text{es ist.}$$

Bemerkungen

(i) Wir nennen a_s und a_n den <u>halbeinfachen</u> (bzw. <u>nilpotenten</u>) <u>Teil</u> von $a \in End(V)$.

(ii) Weil a_s und a_n kommutieren, gibt es eine Vektorraumbasis von V, bezüglich der die Matrizen a_s und a_n obere Dreiecksmatrizen sind (vgl. 2.4.2 (i)). Weil a_n nilpotent ist, müssen dann alle Einträge auf der Hauptdiagonalen der Matrix von a_n gleich Null sein, d.h. die Matrizen a und a_s haben dieselben Einträge auf der Hauptdiagonalen. Insbesondere gilt

$$\det(a) = \det(a_s) \text{ und } \det(a_n) = 0.$$

Beweis von 2.4.4. <u>Zu (i) und (ii)</u>. Seien

$$\chi_a(x) := \det(x\cdot 1 - a) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{n_i}$$

das charakteristische Polynom von a und dessen Zerlegung in ein Produkt von paarweise teilerfremden linearen Faktoren und

$$V = V_i \oplus \ldots \oplus V_r$$

die Hauptraumzerlegung von V, wobei

$$V_i := \operatorname{Ker}(a - \lambda_i\cdot 1)^{n_i}$$

den Hauptraum zum Eigenwert λ_i bezeichne. Die V_i sind von 0 verschiedene a-stabile lineare Unterräume von V (weil a mit $a - \lambda_i\cdot 1$ kommutiert).Weil die Polynome $(x - \lambda_i)^{n_i}$ paarweise teilerfremd sind, gibt es nach dem Chinesischen Restesatz ein Polynom

$$P(x) \in k[x]$$

mit

$$P(x) \equiv \lambda_i \bmod (x - \lambda_i)^{n_i} \text{ für } i = 1,\ldots,r \tag{1}$$

Falls alle λ_i von Null verschieden sind, kann man P außerdem noch so wählen, daß auch

$$P(x) \equiv 0 \bmod x. \tag{2}$$

gilt. Das ist aber auch dann der Fall, wenn eines der λ_i gleich 0 ist, denn die Kongruenz von (1) mit $\lambda_i = 0$ hat die Gestalt $P(x) \equiv 0 \bmod x^{n_i}$. Damit besteht aber auch die Kongruenz (2).

Wir setzen

$$a_s := P(a).$$

1. <u>Schritt</u>. Die Einschränkung von a_s auf V_i ist gerade die skalare Multiplikation mit λ_i (für i = 1, ... , r).

Nach (1) gibt es ein Polynom $P_i(x) \in k[x]$ mit

$$P(x) = \lambda_i + P_i(x)\cdot (x - \lambda_i)^{n_i}.$$

Wir ersetzen die Unbestimmte x durch a und gehen zur Einschränkung auf

$$V_i = \operatorname{Ker}((a - \lambda_i\cdot 1)^{n_i})$$

über. Der zweite Summand wird dabei gleich Null. Deshalb gilt

$$a_s|_{V_i} = P(a)|_{V_i} = \lambda_i\cdot 1_{V_i}.$$

2. <u>Schritt</u>. a_s hat dieselben Eigenwerte wie a.

Sei $\lambda = \lambda_i$ ein Eigenwert von a und

$$W(\lambda) := \operatorname{Ker}(a - \lambda\cdot 1)$$

der zugehörige Eigenraum von a. Wegen

$$W(\lambda) := \operatorname{Ker}(a - \lambda\cdot 1) \subseteq \operatorname{Ker}((a - \lambda_i\cdot 1)^{n_i}) = V_i$$

und dem ersten Schritt ist dann

$$a_s|_{W(\lambda)} = \lambda\cdot 1|_{W(\lambda)}$$

Damit gilt

$$W(\lambda) \subseteq W_s(\lambda), \tag{3}$$

wenn wir den Eigenraum von a_s zum Eigenwert λ mit

$$W_s(\lambda) := \mathrm{Ker}(\lambda\cdot 1 - a_s)$$

bezeichnen. Insbesondere ist jeder Eigenwert von a auch ein Eigenwert von a_s.

Sei jetzt umgekehrt μ ein Eigenwert von a_s. Wegen $a_s = P(a)$ kommutieren a und a_s miteinander. Für $w \in W_s(\mu)$ gilt deshalb

$$a_s(a(w)) = a(a_s(w)) = a(\mu\cdot w) = \mu\cdot a(w).$$

Damit ist a(w) ein Eigenvektor von a_s zum Eigenwert μ, d.h. $a(w) \in W_s(\mu)$. Weil dies für jedes $w \in W(\mu)$ der Fall ist, gilt $a(W_s(\mu)) \subseteq W_s(\mu)$. Der Raum

$W_s(\mu)$ ist a-stabil.

Weil k algebraisch abgeschlossen ist, besitzt a einen Eigenvektor in $W_s(\mu)$, sagen wir

$$0 \neq w \in W_s(\mu) \cap W(\lambda_i).$$

Wegen (3) gilt dann auch

$$0 \neq w \in W_s(\mu) \cap W_s(\lambda_i),$$

also ist $\mu = \lambda_i$ auch ein Eigenwert von a.

3. Schritt. Es gelten (i) und (ii).

Wir setzen

$$Q(x) := x - P(x)$$

und

$$a_n = Q(a) = a - P(a) = a - a_s$$

Dann gilt (ii). Man beachte wegen (1) ist das Absolutglied von P(x) gleich Null - und damit auch das von Q.

Nach dem ersten Schritt besteht V_i-{0} aus Eigenvektoren von a_s zum Eigenwert λ_i. Weil V die direkte Summe der V_i ist, besitzt V eine Basis aus Eigenvektoren von a_s, d.h.

a_s ist halbeinfach.

Nach Definition von V_i ist die Jordansche Normalform von $a|_{V_i}$ eine obere Dreiecksmatrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle gleich λ_i sind. Dehalb ist

$$\begin{aligned} a|_{V_i} - \lambda_i\cdot 1_{V_i} &= (a - a_s)|_{V_i} && \text{(nach dem ersten Schritt)} \\ &= a_n|_{V_i} \end{aligned}$$

ist nilpotent. Weil dies für jedes i der Fall ist, ist auch

a_n nilpotent.

Nach Definition von a_n gilt

$$a = a_s + a_n.$$

Als Polynome in a kommutieren $a_s = P(a)$ und $a_n = Q(a)$ miteinander,

$$a_s \circ a_n = a_n \circ a_s.$$

<u>Zur Eindeutigkeitsaussage von</u> (i).
Sei eine weitere additive Jordan-Zerlegung

$$a = b_s + b_n$$

von a gegeben, d.h. b_s soll halbeinfach und b_n nilpotent sein, und die beiden Endomorphismen von V sollen miteinander kommutieren,

$$b_s \circ b_n = b_n \circ b_s.$$

Wir haben zu zeigen,

$$b_s = a_s \text{ und } b_n = a_n.$$

Weil b_s und b_n miteinander kommutieren, kommutieren sie auch mit a:

$$\begin{aligned} a \bullet b_s &= (b_s + b_n) \bullet b_s \\ &= b_s^2 + b_n \bullet b_s \\ &= b_s^2 + b_s \bullet b_n \\ &= b_s \bullet (b_s + b_n) \\ &= b_s \bullet a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a \bullet b_n &= (b_s + b_n) \bullet b_n \\ &= b_s \bullet b_n + b_n^2 \\ &= b_n \bullet b_s + b_n^2 \\ &= b_n \bullet (b_s + b_n) \\ &= b_n \bullet a. \end{aligned}$$

Weil b_s und b_n mit a kommutieren, kommutieren sie auch mit $a_s = P(a)$ und $a_n = Q(a)$.
Wegen $a_s + a_n = a = b_s + b_n$ gilt

$$a_s - b_s = b_n - a_n.$$

Weil a_s und b_s kommutieren, ist auch $a_s - b_s$ halbeinfach. Weil b_n und a_n kommutieren, ist auch $b_n - a_n$ nilpotent. Damit ist der halbeinfache Endomorphismus auf der linken Seite nilpotent. Alle Eigenwerte müssen gleich 0 sein. Es folgt

$$a_s - b_s = 0$$

also auch

$$b_n - a_n = 0,$$

d.h. es ist

$$b_s = b_s \text{ und } b_n = a_n.$$

<u>Zu (iii)</u>. 1 .<u>Schritt</u>. $\chi_a(x) = \chi_{a|_W}(x) \bullet \chi_{\bar{a}}(x)$.

Wir betrachten das kommutative Diagramm von k-linearean Abbildungen mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[d, "a|_W"] & V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "a"] & V/W \arrow[r] \arrow[d, "\bar{a}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W \arrow[r] & V \arrow[r, "\rho"] & V/W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Wir wählen eine Basis von W, sagen wir,

$$w_1,\dots, w_r \in W$$

und ergänzen diese zu einer Basis von V,

$$w_1,\dots, w_r , v_1,\dots,v_s \in V.$$

Weil die w_i im Kern der natürlichen Abbildung ρ: V $\longrightarrow$ V/W auf den Faktorraum liegen, bilden die

$$\bar{v}_i := \rho(v_i) \text{ , } i = 1,\dots,s,$$

ein Erzeugendensystem von V. Wegen

$$\dim V/W = \dim V - \dim W = r + s - r = s,$$

bilden sie sogar eine Basis von V/W. Betrachten wir die Matrizen der Abbildungen a, $a|_W$ und $\bar{a}$ bezüglich der eingeführten Basen. Weil W stabil ist bezüglich a, gilt

$$a(w_i) = \sum_{\alpha=1}^{r} c_{\alpha i}\bullet w_\alpha \text{ mit } c_{\alpha i} \in k \text{ } (i = 1, \dots , r)$$

Die Matrix $M(a|_W)$ bezüglich der w_α ist damit gleich

$$M(a|_W) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & \dots & c_{rr} \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$a(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{r} d_{\alpha j}\bullet w_\alpha + \sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\bullet v_\beta \text{ mit } d_{\alpha j}, e_{\beta j} \in k \text{ } (j=1,\dots,s)$$

Für die Matrix M(a) von a bezüglich der Basis der w_i und v_j erhalten wir so

$$M(a) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} & d_{11} & \dots & d_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & \dots & c_{rr} & d_{r1} & \dots & d^{r}_{s} \\ 0 & \dots & 0 & e_{1,1} & \dots & e_{1,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e_{s1} & \dots & e_{ss} \end{pmatrix}$$

Im linken oberen Block befindet sich gerade die Matrix $M(a|_W)$. Wir brauchen noch eine geeignete Interpretation des rechten unteren Blocks. Dazu wenden wir die natürlichen Abbildung ρ: V $\longrightarrow$ V/W auf die $a(v_j)$ an. Weil die $w_\alpha \in W$ im Kern von ρ liegen, erhalten wir

$$\bar{a}(\bar{v}_j) = \bar{a}(\rho(v_j)) = \rho(a(v_j))$$

$$= \rho\Big(\sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\cdot v_\beta\Big)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\cdot \rho(v_\beta)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\cdot \overline{v}_\beta$$

Die Matrix der e_{ij} ist somit gerade die Matrix von $\overline{a}$ bezüglich der Basis der $\overline{v}_\beta$:

$$M(\overline{a}) \quad = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{s1} & \dots & e_{ss} \end{pmatrix}$$

Zusammen erhalten wir

$$M(a) \quad = \begin{pmatrix} M(a|_W) & (d_{ij}) \\ 0 & M(\overline{a}) \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von a ist damit gleich

$$\chi_a(x) \quad = \det(x\cdot 1 - M(a)) = \det \begin{pmatrix} x\cdot 1 - M(a|_W) & (-d_{ij}) \\ 0 & x\cdot 1 - M(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

$$= \det(x\cdot 1 - M(a|_W)) \cdot \det(x\cdot 1 - M(\overline{a}))$$

$$= \chi_{a|_W}(x)\cdot\chi_{\overline{a}}(x).$$

2. <u>Schritt</u>. Die a_s- und a_n-Stabilität von W.

Nach Voraussetzung ist W a-stabil. Nach (ii) gilt $a_s = P(a)$ und $a_n = Q(a)$. Deshalb ist W auch a_s-stabil und a_n-stabil.

3. <u>Schritt</u>. Die Jordan-Zerlegung von $a|_W$.

Nach dem ersten Schritt ist das charakteristische Polynom von $a|_W$ ein Teiler des charateristischen Polynoms von a. Aus der definierenden Bedingung (2) für das Polynom P lesen wir ab, daß wir zur Berrechnung von $(a|_W)_s$ aus $a|_W$ dasselbe Polynom P benutzen können wie für die Berrechnung von a_s aus a. Damit ist

$$(a|_W)_s = P(a|_W) = P(a)|_W = (a_s)|_W$$

und

$$(a|_W)_n = a|_W - (a|_W)_s = a|_W - (a_s)|_W = (a-a_s)|_W = (a_n)|_W$$

4. <u>Schritt</u>. Die Jordan-Zerlegung von $\overline{a}$.

Nach dem ersten Schritt ist das charakteristische Polynom von $\overline{a}$ ein Teiler des charateristischen Polynoms von a. Aus der Definition des Polynoms P durch die Bedingungen (1) lesen wir ab, daß wir zur Berrechnung von $\overline{a}_s$ aus $\overline{a}$ dasselbe Polynom P benutzen können wie für die Berrechnung von a_s aus a. Damit ist

$$(\overline{a})_s = P(\overline{a}) = \overline{P(a)} = \overline{a}_s$$

Dabei sei $\overline{a_s}$ die durch a_s auf V/W induzierte Abbildung. Weiter gilt

$$(\overline{a})_n = \overline{a} - \overline{a_s} = \overline{a-a_s} = \overline{a_n}.$$

Dabei soll $\overline{a_n}$ die durch a_n auf V/W induzierte Abbildung bezeichnen.

Zu (iv). Wir betrachten das Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \\ \downarrow a & & \downarrow a\oplus b \\ V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \end{array}$$

mit

$$i = (id, \phi): V \longrightarrow V\oplus W,\ x \mapsto (x, \phi(x)).$$

Es ist kommutativ, denn für $x \in V$ gilt

$$\begin{array}{lll} (a\oplus b)(i(x)) & = (a\oplus b)(x, \phi(x)) & \text{(nach Definition von i)} \\ & = (a(x), b(\phi(x))) & \text{(nach Definition von } a\oplus b) \\ & = (a(x), \phi(a(x))) & \text{(nach Voraussetzung gilt } \phi\circ a = b\circ\phi) \\ & = i(a(x)) & \text{(nach Definition von i).} \end{array}$$

Nach Definition ist i injektiv. Deshalb können wir V mit seinem Bild bei i identifizieren und als linearen Unterraum von $V\oplus W$ betrachten. Die Kommutativität des Vierecks bedeutet dann, dieser Unterraum ist stabil bezüglich $a\oplus b$ und die Einschränkung von $a\oplus b$ ist gerade a.

Betrachten wir die additive Jordan-Zerlegung von $a\oplus b$:

$$a\oplus b = (a\oplus b)_s + (a\oplus b)_n. \tag{4}$$

Nach (iii) ist

$$a = (a\oplus b)_s|_V + (a\oplus b)_n|_V \tag{5}$$

die Jordan-Zerlegung von a.

1. Schritt. Die Summanden auf der rechten Seite von (4) haben die Gestalt

$$(a\oplus b)_s = a_s\oplus b_s \text{ und } (a\oplus b)_n = a_n\oplus b_n$$

Es gilt:

$a_s\oplus b_s$ ist halbeinfach und $a_n\oplus b_n$ ist nilpotent.

(nach 12.4 (ii)) und

$$a\oplus b = a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n$$

denn für $x \in V$ und $y \in W$ ist

$$\begin{aligned} (a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n)(x,y) &= (a_s\oplus b_s)(x,y) + (a_n\oplus b_n)(x,y) \\ &= (a_s(x), b_s(y)) + (a_n(x),b_n(y)) \\ &= (a_s(x) + a_n(x), b_s(y) + b_n(y)) \\ &= (a(x), b(y)) \\ &= (a\oplus b)(x,y). \end{aligned}$$

Nach (i) reicht es zu zeigen, daß $a_s\oplus b_s$ und $a_n\oplus b_n$ kommutieren. Das ist aber der Fall,

denn für $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$\begin{aligned} ((a_s\oplus b_s)\circ(a_n\oplus b_n))(x,y) &= (a_s\oplus b_s)(a_n(x),b_n(y)) \\ &= (a_s(a_n(x)), b_s(b_n(y)) \end{aligned}$$

$= (a_n(a_s(x)), b_n(b_s(y))$ (a_s und a_n bzw. b_s und b_n kommutieren)

$= (a_n \oplus b_n)(a_s(x), b_s(y))$

$= ((a_n \oplus b_n) \circ (a_s \oplus b_s))(x,y)$.

2. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung.

Für jedes $x \in V$ gilt

$$
\begin{aligned}
a_s(x) &= (a\oplus b)_s|_V(x) && \text{(weil (5) die Jordan-Zerlegung von a ist)}\\
&= (a\oplus b)_s(i(x)) && \text{(wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)}\\
&= (a_s \oplus b_s)(x, \phi(x)) && \text{(Definition von i)}\\
&= (a_s(x), b_s(\phi(x)))
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir $a_s(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_s(x)) = (a_s(x), b_s(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_s(x), \phi(a_s(x))) = (a_s(x), b_s(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_s(x)) = b_s(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$\phi \circ a_s = b_s \circ \phi.$$

Damit besteht die erste behauptete Identiät. Die analgoge Rechnung mit a_n anstelle von a_s führt zur zweiten: für jedes $x \in V$ gilt

$$
\begin{aligned}
a_n(x) &= (a\oplus b)_n|_V(x) && \text{(weil (5) die Jordan-Zerlegung von a ist)}\\
&= (a\oplus b)_n(i(x)) && \text{(wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)}\\
&= (a_n \oplus b_n)(x, \phi(x)) && \text{(Definition von i)}\\
&= (a_n(x), b_n(\phi(x)))
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir $a_n(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_n(x)) = (a_n(x), b_n(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_n(x), \phi(a_n(x))) = (a_n(x), b_n(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_n(x)) = b_n(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$\phi \circ a_n = b_n \circ \phi.$$

QED.

Index

Inhalt